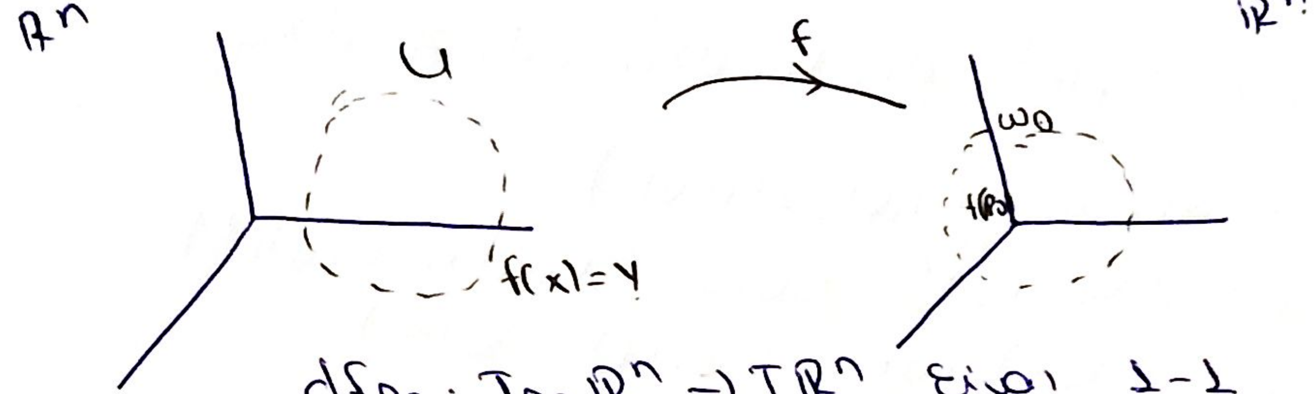
Διαφορική Γεωμετρία

Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης:

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διαφ. τάξεως C^1



$df_{P_0}: T_{P_0}\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ είναι 1-1

Τότε η περιοχή $U_0 \subseteq U$ του P_0 και περιοχή W_0 του $f(P_0)$ ώστε $f|_{P_0}: U_0 \to W_0$ είναι 1-1, επί και η αντίστροφή της είναι διαφ. τάξεως C^1.

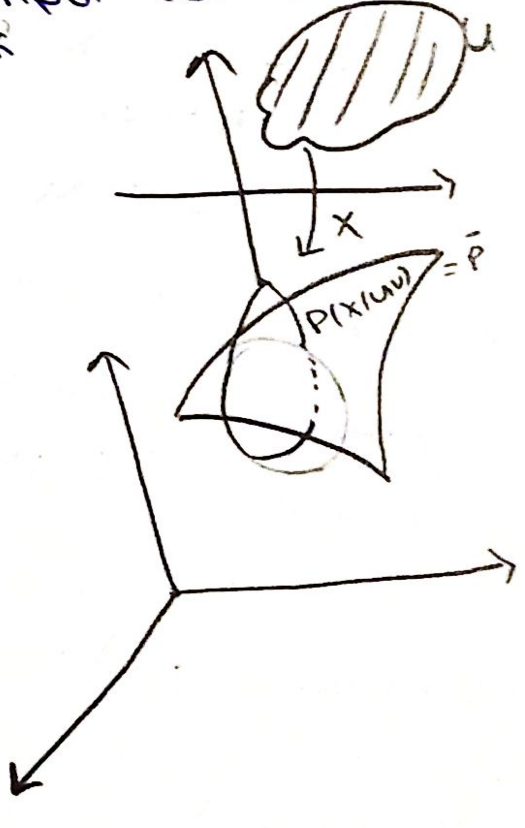
Κανονικές Επιφάνειες

Ορισμός: Καλούμε κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ κάθε υποσύνολο του S που πληροί τα ακόλουθα. Για κάθε σημείο $P \in S$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του V στο $\mathbb{R}^3$ και απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ τ.ω.

i) Η X διαφορίσιμη (C^k, $k \geq 3$) και επί (δηλ. $X(U) = V \cap S$)

ii) $X: U \to V \cap S$ είναι ομοιομορφισμός.

iii) $\forall q \in U$ το διαφορικό $dX_q: T_q\mathbb{R}^2 \to T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ να είναι 1-1.



- $(u,v) \in U$ παράμετροι
- X σύστημα συν/ων της S με παράμετρο (u,v)

Αν $X(u,v)=\vec{P}$ τοτε (u,v) θα καλουνται συντεταγμενες του $\vec{P} \in S$ ως προς X. ②

• $V \cap S = X(U)$ περιοχη συντεταγμενων του X.

$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = X_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$$

$$2 = \dim T_q\mathbb{R}^2 = \dim \ker dX_q + \dim \operatorname{Im} dX_q$$

$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$\{dX_q(e_1), dX_q(e_2)\}$: Βαση $\operatorname{Im} dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$

$dX_q(e_1) = (X \circ c)'(0) = X \circ c(t) = X_u(q)$

$dX_q(e_1) = X_u(q)$

$dX_q(e_2) = X_v(q)$

$c(t) = (u_0, v_0) + te_1 = (u_0 + t, v_0)$

$c(0) = (u_0, v_0) = q$

$c'(0) = e_1$

$X \circ c(t) = X(c(t)) = X(u_0 + t, v_0)$

Αρα $dX_q(e_1) = X_u(q)$

$dX_q(e_2) = X_v(q)$

iii) $\Rightarrow$ $X_u \times X_v(q) \neq 0$ $\forall q \in U$

$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$X_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$

$X_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$

$$X_u \times X_v(u,v) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

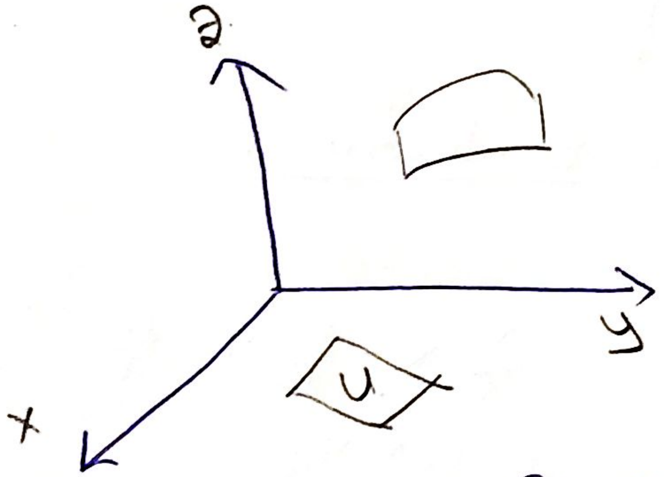
Παρατηρηση: Αν S ειναι κανονικη επιφανεια και $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ τοτε το συνολο $\tilde{S} = T(S)$ ειναι κανονικη επιφανεια.

Αποδ

Αν $x: U \to V \cap S$ ειναι συστημα συντ/ων της S τοτε $x: U \to T(V) \cap \tilde{S}$ ειναι συστημα συντ/ων για την $\tilde{S}$.

$\tilde{x}: T \circ x$

Επιφανειες Γραφηματα



Εστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ειναι συναρτηση. Το γραφημα της ειναι το συνολο

$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$

Θα δειξω οτι η Γ_f ειναι κανονικη επιφανεια.
Οριζω την απεικονιση $x: U \to \Gamma_f$:

$x(u,v) = (u,v,f(u,v))$

$x(u_1,v_1) = x(u_2,v_2) \Rightarrow$
$(u_1,v_1,f(u_1,v_1)) = (u_2,v_2,f(u_2,v_2))$

$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases} \Rightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$

Αρα η $x: U \to \Gamma_f$ ειναι 1-1 και επι.

Ειναι η $x^{-1}: \Gamma_f \to U$ συνεχης

④

$X^{-1}(x,y,z)=(u,v) \Leftrightarrow X(u,v)=(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (u,v,f(u,v))=(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} u=x \\ v=y \\ z=f(u,v) \end{cases}$

$X^{-1}(x,y,z)=(x,y)=(x,y,0)$ ← συνεχής στο επ. xOy

$X_u=(1,0,f_u)$

$X_v\ (0,1,f_v)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u,-f_v,1) \neq (0,0,0)$$

<u>Κάθε επίπεδο είναι κανονική επιφάνεια</u>:

$(\pi): \quad Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

$(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$

Έστω ότι $\Gamma\neq 0$: $(\pi)\ z=-\frac{A}{\Gamma}x-\frac{B}{\Gamma}y-\frac{\Delta}{\Gamma}$

$=f(x,y)$

$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

$X_1: U\subseteq\mathbb{R}^3 \to V_1\cap S^2$

$X_1(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

$U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$

$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>0\}$

$X_2: U\to V_2\cap S^2$, $X_2(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$

$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z<0\}$

• $X_3 : U \to V_3 \cap S^2$, $X_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$

$X_4 : U \to V_4 \cap S^2$, $X_4(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

$V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$

• $X_5 : U \to V_5 \cap S^2$, $X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$

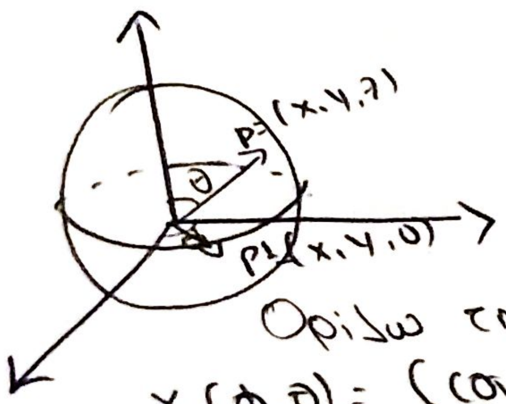
$V_5 = \{(x,y,z) \mid x > 0\}$

• $X_6 : U \to V_6 \cap S^2$, $X_6(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$

$V_6 = \{(x,y,z) \mid x < 0\}$

$\bigcup_{i=1}^{6} x_i(u) = S^2$

Β' τρόπος: Νδο η παρακάτω επιφάνεια είναι κανονική



$z = \cos\theta$
$x = \rho\cos\phi$
$y = \rho\sin\phi$ $\Big\} \quad \rho = \sin\theta \Rightarrow$

$(x,y,z) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$

Ορίζω την απεικόνιση $\Rightarrow X : U \to V \cap S^2$.

$X(\phi,\theta) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$

$0 < \phi < 2\pi$
$0 < \theta < \pi$

$U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

C ημικύκλιο

$V \cap S^2 = S^2 \setminus C$, όπου

$C = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y = 0, x \geq 0\}$

$V = \{(x,y,z) \mid y \neq 0, x < 0\}$